几何学第二周（国庆期间）作业安排

提示：10月9日课上还有一次讲解和讨论。10月14日周三习题课交。

定义：一个集合上元素之间的二元关系$\sim$，如果满足"自反性、对称性、传递性"，就称为一个**"等价关系"**。自反性是指一个元素a总有$a \sim a$。对称性是指若$a \sim b$ 则必有$b \sim a$。传递性是指若$a \sim b, b \sim c$ 则必有$a \sim c$。彼此等价的元素一起构成一个**"等价类"**。

（一）（必做）。设想一个二维的世界（可以叫曲面），有通常的直线（射线）、长度、角度概念，而且过任意两点都可以作唯一的一条直线。为了谈论**"绝对方向"**和**"平行"**的概念，我们在过各点的各条射线之间，建立一个**"同向"**关系，定义是：**过A 点的射线a 与过B 点的射线b"同向"，当且仅当$A = B$ 且两条射线重合，或射线AB与a, b 的同位角相等。**

证明：若要"同向"是一个等价关系，等价于要求任何一个三角形的内角和是180度。

（二）（必做）。我们称**两点A, B在直线l 的"同侧"，如果连接这两点的直线段与l不相交。**

证明：对于不在l上的点，（1）同侧关系是一个等价关系；（2）恰好有两个不同的等价类（每个等价类称为"一侧"）。

（提示：基于希尔伯特《几何基础》公理体系（见微信群文档）；要用到帕士公理。）

<u>以下均为选做，请完成其中至少两道。</u>

（三）关于直线"可以任意延伸"，这个表述很含糊。请看以下质疑：

球面上的大圆，算是可以任意延伸吗？

如果把北极点挖掉，那经线在接近这个"洞"时，是否还算可以"任意延伸"？

如果说"长度可以任意长"，那何时定义了长度呢（基于希尔伯特公理体系）？

请给一个更明确、更合理的说法，用希尔伯特公理体系中的哪几条公理，来帮助定义"延长"、"长度"、"任意"等概念。

（四）"面积"满足两条性质，一是"全等图形必有相同面积"，二是"整体等于部分之和"（若图形沿直线或曲线分割成有限块不交、不叠的区域，则总面积等于各部分面积之和）。（这两条称为面积公理，第二条通常叫"有限可加性"。）

请证明：如果欧氏平面上每个图形都有一个赋值，取值为非负实数，且满足这两条性质，则它与通常的面积只相差一个常数倍。

（五）很多人可能觉得，帕士公理是关于连续性的一个命题。但在希尔伯特公理体系中，它没有放在"连续公理"那一组里。你觉得奇怪吗？其实，存在这样一个模型，其中康托尔的区间套原理不成立，而帕士公理（和其它公理）依然成立。你能找到这样一个模型吗？试构造并论证它有所说性质。

（六）请证明三维欧氏空间中的普通三棱锥的三个顶角之间，满足三角不等式。